KVANTITATIVNE METODE U GRAĐEVINSKOM MENADŽMENTU

vježbe 2017/18

TEORIJA VJEROVATNOĆE I SLUČAJNI DOGAĐAJI

1. **Slučajni događaj**
2. **Proračun vjerovatnoće slučajnog događaja**

V1

Zadatak 1.

Odrediti elementarni događaj i prostor elementarnih događaja za sljedeće eksperimente:

a) utvrđivanje vremena trajanja tri sijalice

b) mjerenje dnevne količine padavine i minimalne dnevne temperature u Podgorici

RJEŠENJE

a) Elementarni događaj je uređena trojka (x,y,z) , gdje je x, y, z bilo koji racionalni pozitivni broj kojim može biti iskazano vrijeme trajanja prve, druge, odnosno trece sijalice:

$E=(x,y,z) \in R^3 : x>0,\ y>0,\ z>0$

Prostor elementarnih događaja $S=\{E=(x,y,z) \in R^3 : x>0,\ y>0,\ z>0\}$

b) Elementarni događaj je uređena dvojka (x,y) , gdje je x racionalni pozitivni broj kojim može biti iskazana dnevna količina kiše ($x \geq 0$), a y je racionalni broj kojim može biti prikazana minimalna dnevna temperatura u Podgorici

$E=(x,y) \in R^2 : x \geq 0,\ y \in R$, ili ipak u suzenim granicama: $-50 \leq y \leq 50$.

Prostor elementarnih događaja $S=\{E=(x,y) \in R^2 : x \geq 0,\ -50 \leq y \leq 50\}$

Zadatak 2.
Eksperiment je gađanje u metu u tri uzastopna pokušaja. Označimo sa A, B i C događaje: pogodak iz prvog pokusaja (A), pogodak iz drugog pokusaja (B) i pogodak iz trećeg pokušaja (C). Pomoću ovih događaja izraziti sljedeće događaje:

RJEŠENJE

a) sva tri pogotka $A \cap B \cap C$

b) tri promašaja $A^c \cap B^c \cap C^c = (A \cup B \cup C)^c$

c) bar jedan pogodak $A \cup B \cup C$

d) bar jedan promašaj $A^c \cup B^c \cup C^c = (A \cap B \cap C)^c$

e) najviše dva pogotka ____________________

f) najviše jedan pogodak ___________________

g) bar dva pogotka $(A \cap B \cap C) \cup (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$

h) do trećeg gađanja nije bilo pogodaka_______________________

Zadatak 3.
U skupu od 27 proizvoda, 7 je neispravnih. Kolika je vjerovatnoća da izaberemo uzorak koji se sastoji od 5 dobrih i 3 neispravna proizvoda?

RJEŠENJE

- Eksperiment je izbor r=8 elemenata (bez vraćanja) iz skupa koji ima n=27 elemenata.
- elementarni događaj je grupa od 8 proizvoda – nije važan redosled, pa se ne radi o uređenoj 8-orki.
- ovakvih grupa (podskupova) koje čine elementarni događaj ima ukupno
$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \frac{27!}{8!\,19!} = 2220075$$
- Događaj A: „uzorak ima 5 ispravnih i 3 neispravna proizvoda“
- ukupno ispravnih proizvoda ima 27-7=20, a ukupno neispravnih ima 7. U uzorku ovih 5 ispravnih potiče od ispravnih proizvoda 5 ispravnih proizvoda se od ovih 20 ispravnih može odabrati na $\binom{20}{5}$ načina
- neispravni proizvodi u uzorku potiču od ukupno 7 neispravnih proizvoda. Ova grupa od tri neispravna se može odavrati na $\binom{7}{3}$ načina.
- Dakle ukupno se 5 ispravnih i 3 neispravna proizvoda mogu izabrati na
$\binom{20}{5}$. $\binom{7}{3}$=542640 načina.
- Po klasičnoj definiciji je vjerovatnoća da se desi događaj A
P(A)=542640/2220075=0,24442

Zadatak 4.

U skladištu je 100 proizvoda, 70 proizvoda prve klase, 20 proizvoda druge klase i 10 proizvoda treće klase. Kontrolor testira tri proizvoda i daje pozitvnu ocjenu ako su svi proizvodi prve klase. Na osnovu koliko posto svih uzoraka će kontrolor dati pozitivnu ocjenu proizvoda?

RJEŠENJE

- Broj uzoraka veličine *r* = 3 od *n* = 100 elemenata. Pposto nije vazan redosled u uzorku, onda je broj razlicitih uzoraka koji se moze dobiti broj kombinacija 3 klase od 1000 elemenata

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \frac{100!}{3!\,97!} = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97!}{3! \cdot 97!} = 161700$$

- događaj A :“ sva tri izabrana proizvoda su prve klase“, kako bi kontrolor mogao da da pozitivnu ocjenu.
- Ovakav uzorak znaci da se u njemu od mogucih 70 proizvoda prve klase moraju naci 3 proizvoda, a oni se mogu izabrati na ovoliko nacina:

$$\binom{n}{r} = \binom{70}{3} \frac{70!}{3!\,(67)!} = \frac{70 \cdot 69 \cdot 68 \cdot 67!}{3! \cdot 67!} = 54740$$

- Nadalje, u uzorku se od 20 proizvoda druge klase ne smije naci niti jedan proizvod, a to znaci da se izbor može izvršiti na ovoliko načina:

$$\binom{n}{r} = \binom{20}{0} \frac{20!}{0!\,(20)!} = 1$$

- Slično prethodnom, u uzorku se od 10 proizvoda trece klase ne smije naci niti jedan proizvod, a to znaci da se izbor može izvršiti na ovoliko načina:

$$\binom{n}{r} = \binom{10}{0} \frac{10!}{0!\,(10)!} = 1$$

- Dakle ukupan broj uzoraka u kojima su svi proizvodi prve klase je :54740*1*1=54740
- Odnosno kontrolor će dati pozitivnu ocjenu u slučajevima kada izvuce ovakav uzorak, a to je :
- 54740/161700=0,3385, odnosno 33,85% slučajeva

Zadatak 5.
Na koliko načina možemo rasporediti 3 bagera (jednaki) na 6 gradilišta?

RJEŠENJE

- Posto nije vazan redosled u uzorku, onda je broj razlicitih uzoraka koji se moze dobiti broj kombinacija 3 klase od 6 elemenata sa ponavljanjem:
$$\binom{n+r-1}{r} = \frac{n+r-1!}{r!\,(n-1)!} = \frac{(6+3-1)!}{3!\,(6-1)!} = \frac{8!}{3!\cdot 5!} = 56$$

Zadatak 6.
Ako je vjerovatnoća da jedna vrsta gume ima rok trajanja veći od 10000 km jednaka 0,95, kolika je vjerovatnoća da će na autu:
a) sve gume trajati duže
b) barem jedna guma pući prije pređenih 10000 km?

<u>**RJEŠENJE**</u>

- neka je događaj A- „jedna guma je prešla više od 10000 km“

a) događaj B –“ sve četiri su prešle više od 10000 km“

   – $P(B)=P(A \cap A \cap A \cap A)=P(A)*P(A)*P(A)*P(A)=P(A)^4=0{,}954=$ 0,81450625

b) događaj C –“ makar jedna je pukla prije 10000 km“=„nijesu sve četiri prešle više od 10000 km“

   – $P(C)=1-P(A \cap A \cap A \cap A)=1-P(A)*P(A)*P(A)*P(A)=1-P(A)^4=1-0{,}954=1-0{,}81450625=0{,}18549375$

Zadatak 7.

Motor pokreće električni generator, a vjerovatnoća otkazivanja motora u roku jednog mjeseca je 0,08, a generatora 0,04. Kolika je vjerovatnoća da će se morati u tom mjesecu obavljati popravka:

a) oba dijela,

b) makar jednog dijela ?

RJEŠENJE

a) neka je događaj A „ pokvario se motor“, $P(A)=0,08$

- događaj B; „ Pokvario se generator“. $P(B)= 0,04$
- događaj C: „ pokvarili se motor i generator“=treba popravljati i generator i motor“, $C=A\cap B$
- kako su A i B nezavisni, onda se istovremeni kvar i motora i generatora može desiti sa vjerovatnoćom:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=0,08*0,04= 0,0032$$

b) događaj D=„ pokvario se generator ili motor“; = događaj;“treba obaviti popravku motora ili generatora“ $D=A\cup B$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0,08+0,04-0,08*0,04=0,1168$$

Zadatak 8.
Dva gradilišta se snabdijevaju istim količinama betona iz dvije fabrike betona FB1 i FB2, čije su udaljenosti od gradilišta redom 8, odnosno 6 km. Pri tome na ukupno 4 km transport se obavlja istim putem. Naći vjerovatnoću da do zastoja u transportu betona dođe u transportu :
a) od fabrike FB1 b) od fabrike FB2 c) od obje fabrike d) od makar jedne fabrike

RJEŠENJE

a) neka je događaj A „ prekid u transportu od FB1“, P(A)=8/14=0,571
b) neka je događaj B „ prekid u transportu od FB2“, P(B)=6/14=0,429
c) događaj C: „ prekid na zajednickom dijelu puta“, P(C)=P(A∩B)=4/14=0,286
d) događaj D: „ prekid na bilo kom dijelu puta “, P(D)=P(AUB)

   po formuli za vjerovatnoću zbira slučajnih događaja je:

$$P(AUB)=P(A)+P(B)-P(AB)=0,571+0,429-0,286=0,714$$

Literatura

- Vukadinović, S.: Elementi teorije verovatnoće i matematičke statistike, Privredni pergled, Beograd, 1986
- Vukadinović, S.: Zbirka rešenih zadataka iz teorije verovatnoće, Privredni pergled, Beograd, 1983
- Bruckler, F.M: Pierre de Fermat; Osječki matematički list 5(2005), 37–42
- http://www.e-statistika.rs
- Čuljak, V: Vjerojatnost i statistika, Građevinski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, 2011, https://portal.uniri.hr/system/resources/docs/000/004/082/original/Skripta_Vera_%C4%8Culjak.pdf?1413283708
- Tomič, V.: Elementi verovatnoće u srednjoj školi, (master rad), http://www.dmi.uns.ac.rs/site/dmi/download/master/matematika/VojinTomic.pdf